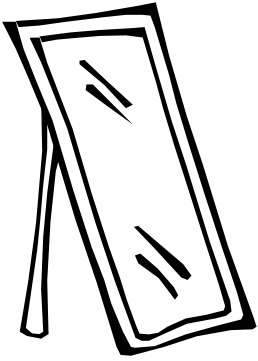


PROBABILIDADES

Y SI JUEGO ¿GANARÉ?



Antes de comenzar la unidad responde a lo siguiente...

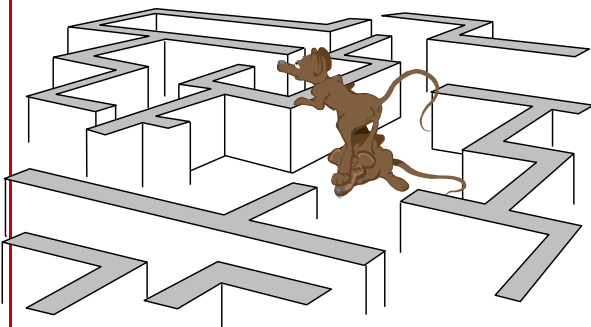
1. Alguna vez haz jugado cartas... y deseas ganar.
1. Siempre estas pendiente de si haces algo... deseas que resulte...
2. ¿ De qué depende el resultado?
3. ¿ Cómo puedes asegurar el porcentaje que tienes de ganar?

LAS PROBABILIDADES EN NUESTRAS VIDAS

Se ve interesante el tema... Ahora voy a investigar de que trata esto para luego aplicar lo que haya aprendido.



¿Cuál será el caminito de la suerte ?
Siento que tengo muchas dudas adónde debo ir.



Ánimo... ya lo encontrarás .

La **probabilidad** mide la frecuencia con la que aparece un resultado determinado cuando se realiza un experimento.

Ejemplo: tiramos un dado al aire y queremos saber cual es la probabilidad de que salga un 2, o que salga un número par, o que salga un número menor que 4.

El experimento tiene que ser aleatorio, es decir, que pueden presentarse diversos resultados, dentro de un conjunto posible de soluciones, y esto aún realizando el experimento en las mismas condiciones. Por lo tanto, a priori no se conoce cual de los resultados se va a presentar:

Ejemplos: lanzamos una moneda al aire: el resultado puede ser cara o cruz, pero no sabemos de antemano cual de ellos va a salir.

En la Lotería de Navidad, el "Gordo" (en España se llama "Gordo" al primer premio) puede ser cualquier número entre el 1 y el 100.000, pero no sabemos a priori cual va a ser (si lo supiéramos no estaríamos aquí escribiendo esta lección).

Hay experimentos que no son aleatorios y por lo tanto no se les puede aplicar las reglas de la probabilidad.

Ejemplo: en lugar de tirar la moneda al aire, directamente seleccionamos la cara. Aquí no podemos hablar de probabilidades, sino que ha sido un resultado determinado por uno mismo.

Antes de calcular las probabilidades de un experimento aleatorio hay que definir una serie de conceptos:

Suceso elemental: hace referencia a cada una de las posibles soluciones que se pueden presentar.

Ejemplo: al lanzar una moneda al aire, los sucesos elementales son la cara y la cruz. Al lanzar un dado, los sucesos elementales son el 1, el 2, ..., hasta el 6.

Suceso compuesto: es un subconjunto de sucesos elementales.

Ejemplo: lanzamos un dado y queremos que salga un número par. El suceso "numero par" es un suceso compuesto, integrado por 3 sucesos elementales: el 2, el 4 y el 6

O, por ejemplo, jugamos a la ruleta y queremos que salga "menor o igual que 18". Este es un suceso compuesto formado por 18 sucesos elementales (todos los números que van del 1 al 18).

Al conjunto de todos los posibles sucesos elementales lo denominamos **espacio muestral**. Cada experimento aleatorio tiene definido su espacio muestral (es decir, un conjunto con todas las soluciones posibles).

Ejemplo: si tiramos una moneda al aire una sola vez, el espacio muestral será cara o cruz.

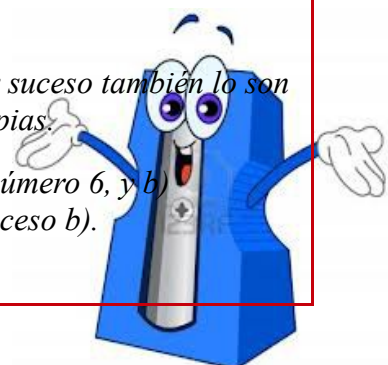
Si el experimento consiste en lanzar una moneda al aire dos veces, entonces el espacio muestral estaría formado por (cara-cara), (cara-cruz), (cruz-cara) y (cruz-cruz).

Probabilidad: Relación entre sucesos

Entre los sucesos compuestos se pueden establecer distintas relaciones:

a) Un suceso puede estar contenido en otro: las posibles soluciones del primer suceso también lo son del segundo, pero este segundo suceso tiene además otras soluciones suyas propias:

Ejemplo: lanzamos un dado y analizamos dos sucesos: a) que salga el número 6, y b) que salga un número par. Vemos que el suceso a) está contenido en el suceso b).



Siempre que se da el suceso a) se da el suceso b), pero no al contrario. Por ejemplo, si el resultado fuera el 2, se cumpliría el suceso b), pero no el a).

b) Dos sucesos pueden ser iguales: esto ocurre cuando siempre que se cumple uno de ellos se cumple obligatoriamente el otro y viceversa.

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga número par; y b) que salga múltiplo de 2. Vemos que las soluciones coinciden en ambos casos.

c) Unión de dos o más sucesos: la unión será otro suceso formado por todos los elementos de los sucesos que se unen.

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga número par y b) que el resultado sea mayor que 3. El suceso unión estaría formado por los siguientes resultados: el 2, el 4, el 5 y el 6

d) Intersección de sucesos: es aquel suceso compuesto por los elementos comunes de dos o más sucesos que se intersectan.

Ejemplo: lanzamos un dado al aire, y analizamos dos sucesos: a) que salga número par; y b) que sea mayor que 4. La intersección de estos dos sucesos tiene un sólo elemento, el número 6 (es el único resultado común a ambos sucesos: es mayor que 4 y es número par).

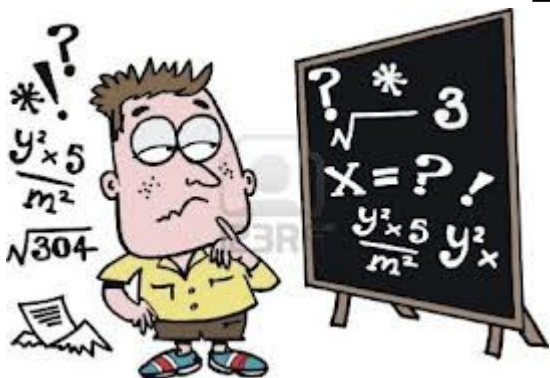
e) Sucesos incompatibles: son aquellos que no se pueden dar al mismo tiempo ya que no tienen elementos comunes (su intersección es el conjunto vacío).

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga un número menor que 3, y b) que salga el número 6. Es evidente que ambos no se pueden dar al mismo tiempo.

f) Sucesos complementarios: son aquellos que si no se da uno, obligatoriamente se tiene que dar el otro.

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga un número par; y b) que salga un número impar. Vemos que si no se da el primero se tiene que dar el segundo (y viceversa).

Cálculo de probabilidades



Probabilidad

Como hemos comentado anteriormente, la probabilidad mide la mayor o menor posibilidad de que se dé un determinado resultado (suceso) cuando se realiza un experimento aleatorio.

La probabilidad toma valores entre 0 y 1 (o expresados en tanto por ciento, entre 0% y 100%):

El valor cero corresponde al suceso imposible: lanzamos un dado al aire y la probabilidad de que salga el número 7 es cero (al menos, si es un dado certificado por la OMD, "Organización Mundial de Dados").

El valor uno corresponde al suceso seguro: lanzamos un dado al aire y la probabilidad de que salga cualquier número del 1 al 6 es igual a uno (100%).

El resto de sucesos tendrá probabilidades entre cero y uno: que será tanto mayor cuanto más probable sea que dicho suceso tenga lugar.

¿Cómo se mide la probabilidad?

Uno de los métodos más utilizados es aplicando la **Regla de Laplace**: define la probabilidad de un suceso como el cociente entre casos favorables y casos posibles.

$$P(A) = \text{Casos favorables} / \text{casos posibles}$$

Veamos algunos **ejemplos**:

a) Probabilidad de que al lanzar un dado salga el número 2: el caso favorable es tan sólo uno (que salga el dos), mientras que los casos posibles son seis (puede salir cualquier número del uno al seis). Por lo tanto:

$$P(A) = 1 / 6 = 0,166 \text{ (o lo que es lo mismo, 16,6\%)}$$

b) Probabilidad de que al lanzar un dado salga un número par: en este caso los casos favorables son tres (que salga el dos, el cuatro o el seis), mientras que los casos posibles siguen siendo seis. Por lo tanto:

$$P(A) = 3 / 6 = 0,50 \text{ (o lo que es lo mismo, 50\%)}$$

c) Probabilidad de que al lanzar un dado salga un número menor que 5: en este caso tenemos cuatro casos favorables (que salga el uno, el dos, el tres o el cuatro), frente a los seis casos posibles. Por lo tanto:

$$P(A) = 4 / 6 = 0,666 \text{ (o lo que es lo mismo, 66,6\%)}$$

d) Probabilidad de que nos toque el "Gordo" de Navidad: tan sólo un caso favorable, el número que jugamos (¡qué triste...!), frente a 100.000 casos posibles. Por lo tanto:

$$P(A) = 1 / 100.000 = 0,00001 \text{ (o lo que es lo mismo, 0,001\%)}$$

Merece la pena Por cierto, tiene la misma probabilidad el número 45.264, que el número 00001, pero ¿cuál de los dos comprarías?

Para poder aplicar la **Regla de Laplace** el experimento aleatorio tiene que cumplir **dos requisitos**:

a) El número de resultados posibles (sucesos) tiene que ser finito. Si hubiera infinitos resultados, al aplicar la regla "casos favorables / casos posibles" el cociente siempre sería cero.

b) Todos los sucesos tienen que tener la misma probabilidad. Si al lanzar un dado, algunas caras tuvieran mayor probabilidad de salir que otras, no podríamos aplicar esta regla.

A la regla de Laplace también se le denomina "**probabilidad a priori**", ya que para aplicarla hay que conocer antes de realizar el experimento cuales son los posibles resultados y saber que todos tienen las mismas probabilidades.

¿Y si el experimento aleatorio no cumple los dos requisitos indicados, qué hacemos?, ¿ponemos una denuncia?

No, no va a ser necesario denunciar a nadie, ya que en este caso podemos acudir a otro modelo de cálculo de probabilidades que se basa en la experiencia (**modelo frecuentista**):

Cuando se realiza un experimento aleatorio un número muy elevado de veces, las probabilidades de los diversos posibles sucesos empiezan a converger hacia valores determinados, que son sus respectivas probabilidades.

Ejemplo: si lanzo una vez una moneda al aire y sale "cara", quiere decir que el suceso "cara" ha aparecido el 100% de las veces y el suceso "cruz" el 0%.

Si lanzo diez veces la moneda al aire, es posible que el suceso "cara" salga 7 veces y el suceso "cruz" las 3 restantes. En este caso, la probabilidad del suceso "cara" ya no sería del 100%, sino que se habría reducido al 70%.

Si repito este experimento un número elevado de veces, lo normal es que las probabilidades de los sucesos "cara" y "cruz" se vayan aproximando al 50% cada una. Este 50% será la probabilidad de estos sucesos según el modelo frecuentista.

En este modelo ya no será necesario que el número de soluciones sea finito, ni que todos los sucesos tengan la misma probabilidad.

Ejemplo: si la moneda que utilizamos en el ejemplo anterior fuera defectuosa (o estuviera trucada), es posible que al repetir dicho experimento un número elevado de veces, la "cara" saliera con una frecuencia, por ejemplo, del 65% y la "cruz" del 35%. Estos valores serían las probabilidades de estos dos sucesos según el modelo frecuentista.

A esta definición de la probabilidad se le denomina **probabilidad a posteriori**, ya que tan sólo repitiendo un experimento un número elevado de veces podremos saber cual es la probabilidad de cada suceso.

Probabilidad de sucesos



Probabilidad de sucesos

Al definir los sucesos hablamos de las diferentes relaciones que pueden guardar dos sucesos entre sí, así como de las posibles relaciones que se pueden establecer entre los mismos. Vamos a ver ahora cómo se refleja esto en el cálculo de probabilidades.

a) Un suceso puede estar contenido en otro: entonces, la probabilidad del primer suceso será menor que la del suceso que lo contiene.

Ejemplo: lanzamos un dado y analizamos dos sucesos: a) que salga el número 6, y b) que salga un número par. Dijimos que el suceso a) está contenido en el suceso b).

$$P(A) = 1/6 = 0,166$$

$$P(B) = 3 / 6 = 0,50$$

Por lo tanto, podemos ver que la probabilidad del suceso contenido, suceso a), es menor que la probabilidad del suceso que lo contiene, suceso b).

b) Dos sucesos pueden ser iguales: en este caso, las probabilidades de ambos sucesos son las mismas.

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga número par, y b) que salga múltiplo de 2. Las soluciones coinciden en ambos casos.

$$P(A) = 3 / 6 = 0,50$$

$$P(B) = 3 / 6 = 0,50$$

c) Intersección de sucesos: es aquel suceso compuesto por los elementos comunes de los dos o más sucesos que se intersectan. La probabilidad será igual a la probabilidad de los elementos comunes.

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga número par, y b) que sea mayor que 3. La intersección de estos dos sucesos tiene dos elementos: el 4 y el 6.

Su probabilidad será por tanto:

$$P(A \cap B) = 2 / 6 = 0,33$$

d) Unión de dos o más sucesos: la probabilidad de la unión de dos sucesos es igual a la suma de las probabilidades individuales de los dos sucesos que se unen, menos la probabilidad del suceso intersección

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga número par; y b) que el resultado sea mayor que 3. El suceso unión estaría formado por los siguientes resultados: el 2, el 4, el 5 y el 6.

$$P(A) = 3 / 6 = 0,50$$

$$P(B) = 3 / 6 = 0,50$$

$$P(A \cap B) = 2 / 6 = 0,33$$

Por lo tanto,

$$P(A \cup B) = (0,50 + 0,50) - 0,33 = 0,666$$

e) Sucesos incompatibles: la probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles será igual a la suma de las probabilidades de cada uno de los sucesos (ya que su intersección es el conjunto vacío y por lo tanto no hay que restarle nada).

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga un número menor que 3, y b) que salga el número 6.

La probabilidad del suceso unión de estos dos sucesos será igual a:

$$P(A) = 2 / 6 = 0,333$$

$$P(B) = 1 / 6 = 0,166$$

Por lo tanto,

$$P(A \cup B) = 0,33 + 0,166 = 0,50$$

f) Sucesos complementarios: la probabilidad de un suceso complementario a un suceso (A) es igual a $1 - P(A)$

Ejemplo: lanzamos un dado al aire. el suceso (A) es que salga un número par; luego su complementario, suceso (B), es que salga un número impar.

La probabilidad del suceso (A) es igual a:

$$P(A) = 3 / 6 = 0,50$$

Luego, la probabilidad del suceso (B) es igual a:

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0,50 = 0,50$$

Se puede comprobar aplicando la regla de "casos favorables / casos posibles":

$$P(B) = 3 / 6 = 0,50$$

g) Unión de sucesos complementarios: la probabilidad de la unión de dos sucesos complementarios es igual a 1.

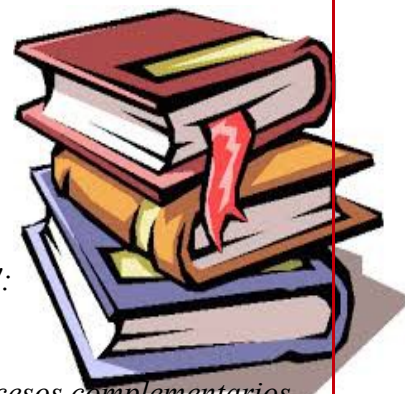
Ejemplo: seguimos con el ejemplo anterior: a) que salga un número par; y b) que salga un número impar. La probabilidad del suceso unión de estos dos sucesos será igual a:

$$P(A) = 3 / 6 = 0,50$$

$$P(B) = 3 / 6 = 0,50$$

Por lo tanto,

$$P(A \cup B) = 0,50 + 0,50 = 1$$



Nombre y Apellido:.....

Tema: Estadística

Trabajo Práctico N°1

- 1- ¿ Cuál es la probabilidad de sacar un cuatro al lanzar un dado ?
- 2- ¿ Cuál es la probabilidad de sacar un as desde un juego de naipes españoles ?
- 3- ¿ Cuál es la probabilidad de sacar una bolilla roja de una caja que contiene 5 bolillas rojas, 18 azules y 7 negras ?
- 4- En un equipo de fútbol están en el campo de juego : 5 delanteros, 3 medio campistas, 2 zagueros y el guardavallas. Se lastima uno de los jugadores, ¿ cuál es la probabilidad de que sea un delantero o un zaguero el que se lesione ?
- 5- Al lanzar tres monedas al aire, cuál es la probabilidad de sacar dos caras ?
- 6- Al tirar dos dados, ¿ cuál es la probabilidad de obtener como suma siete ?
- 7- Juan y Pedro tienen dos dados. Juan tira primero y obtiene ocho puntos. ¿ Cuál es la probabilidad que tiene Pedro para ganar ?
- 8- De un mazo de 52 cartas se puede tomar 1 carta. ¿ Cuál es la probabilidad para que ésta sea un mono ?
- 9- En una caja hay 12 bolas negras y 8 bolas verdes. Qué probabilidad hay de
 - a) sacar una bola negra
 - b) sacar una bola verde
- 9- Hay 16 monedas de \$ 100.; 22 monedas de \$ 50 y 12 de \$ 10. Al sacar una moneda ¿ cuál es la probabilidad de sacar una moneda de \$100?
- 10- ¿ Cuál es la probabilidad de que existan alumnos que se llamen Luis en tu curso ?

Nombre y Apellido:.....

Tema: Estadística

Trabajo Práctico N°2

- 1) Si se lanza un dado, calcula la probabilidad de:
 - a) Que salga un número menor que 5 o número par.
 - b) Que se obtenga un número impar o número múltiplo de tres.

- 2) Se extrae una carta de un naipe de 52 cartas. Calcule la probabilidad de que ocurra:
 - a) Que sea un rey o sea roja.
 - b) Que sea negra o un número del 4 al 8.

- 3) En el lanzamiento de dos dados, calcula la probabilidad de que ocurra:
 - a) Que uno de los números o ambos sean 3
 - b) Que la suma sea 4 o bien que uno o ambos números sean 6.

- 4) Determine la probabilidad para cada uno de los siguientes casos:
 - a) Obtener rey, as, jota de tréboles o reina de diamante de un naipe bien barajado al sacar una sola carta.
 - b) Obtener 8 en la suma del lanzamiento de dos dados balanceados.
 - c) Obtener al menos una cara en tres lanzamientos de una moneda balanceada.

- 5) Se saca al azar una ficha de una caja que contiene 10 fichas rojas, 30 blancas, 20 azules y 15 anaranjadas. Encontrar la probabilidad de que la ficha sea:
 - a) Anaranjada o roja:
 - b) No roja o azul:
 - c) No azul:
 - d) Blanca:
 - e) Roja, blanca o azul:

- 6) Una caja contiene 2 bolitas rojas y 3 azules. Encuentre la probabilidad de que si se sacan dos bolitas al azar (sin reemplazo):
 - a) Ambas sean azules:
 - b) Ambas sean rojas:
 - c) Una sea roja y la otra azul:

- 7) Encuentre la probabilidad de obtener un 4 en dos lanzamientos de un dado balanceado.
- 8) Una bolsa contiene 4 bolitas blancas y 2 negras; otra bolsa contiene 3 bolitas blancas y 5 negras. Si se saca una bolita de cada bolsa, encuentre la probabilidad de que:
- Ambas sean blancas:
 - Ambas sean negras:
 - Una sea blanca y la otra negra:
- 9) Las probabilidades de que un marido y su esposa estén vivos durante 20 años a partir de ahora es 0,8 y 0,9 respectivamente. Encuentre la probabilidad de que en 20 años estén vivos:
- Ambos:
 - Ninguno:
 - Al menos uno:
- 10) Una caja contiene 8 bolitas rojas, 3 blancas y 9 azules. Si se extraen 3 bolitas al azar y sin reemplazo, determine la probabilidad de que:
- Las tres sean rojas:
 - Las tres sean blancas:
 - 2 sean rojas y una blanca:
 - Se saque una de cada color:
 - Se saquen en el siguiente orden: roja, blanca, azul:
- 11) La probabilidad que tiene A de ganar a B en una partida de ajedrez es igual a $1/3$. ¿Cuál es la probabilidad que tiene A de ganar al menos una de tres jugadas?
- 12) En una caja, hay 9 bolas numeradas del 1 al 9. Si se extraen dos al azar, ¿cuál es la probabilidad de obtener:
- Dos números impares:
 - Dos números pares:
 - Un número par y un número impar:
 - Los números 2 y 5:
- 13) De 200 personas, el 40% fuma, 164 saben manejar y sólo el 5% no fuma y no sabe manejar. Si se elige una persona al azar:
- ¿Cuál es la probabilidad de que fume y maneje?
 - ¿y de que fume pero no maneje?

- 14) Una caja contiene 3 esferas verdes y 2 amarillas. Si se sacan sucesivamente 2 esferas, ¿cuál es la probabilidad de que éstas sean alternativamente de distinto color?
- 15) Álvaro y Carola deciden tener 4 hijos. ¿Cuál es la probabilidad de que sean 2 mujeres y dos hombres?
- 16) De un grupo de 7 hombres y 4 mujeres vamos a elegir una comisión de tres personas. Calcular la probabilidad de que la comisión esté formada por:
- 3 hombres:
 - 2 hombres y una mujer:
 - Al menos un hombre:
- 17) Las probabilidades que tienen A, B y C de resolver un mismo problema son $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{7}$ respectivamente. Si intentan hacerlo los tres, determinar la probabilidad de que el problema sea resuelto.
- 18) Once libros, de los cuales 5 son de ingeniería, 4 de matemáticas y dos de química, se colocan al azar en una estantería. Hallar la probabilidad de que los libros de cada materia estén todos juntos.
- 19) En dos lanzamientos de un par de dados balanceados, encuentre la probabilidad de obtener un puntaje 7:
- Una vez:
 - Al menos una vez:
 - Dos veces:
- 20) Se sacan una tras otra dos cartas de un naípe común y bien barajado de 52 cartas. Determine la probabilidad de que:
- La 1ª carta sea o no sea un diez de trébol o un As:
 - La 1ª carta sea un As, pero la segunda no:
 - Al menos una carta sea de diamantes:
 - Las cartas no sean del mismo palo:
 - No más de una carta sea figura: