TEMA : SISTEMA DE ECUACIONES

*Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de dos o más ecuaciones con varias incógnitas.*

Este año trabajaremos sistemas con dos ecuaciones y dos incógnita (llamados 2x2) y con 3 ecuaciones y 3 incógnitas (3x3)

*Una **solución** al sistema corresponde a un valor para cada incógnita, de modo que al remplazarlas en las ecuaciones se satisface la igualdad. Expresaremos las soluciones de un sistema de ecuaciones como pares ordenados (x, y) o (x,y,z) según sea el caso.*

Cada ecuación en un sistema se representa por medio del gráfico de una línea recta.

Técnicas de resolución de sistemas de 2x2

1) Resolución Gráfica:
Para resolver un sistema de ecuaciones por el método gráfico debemos de:

Sea el sistema. $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ -y + 2x = 1 \end{cases}$

Primero, se despeja la incógnita y para escribirlo en la forma de una ecuación principal, como sigue:

$L_1 : y = -3x + 4$

$L_2 : y = 2x - 1$

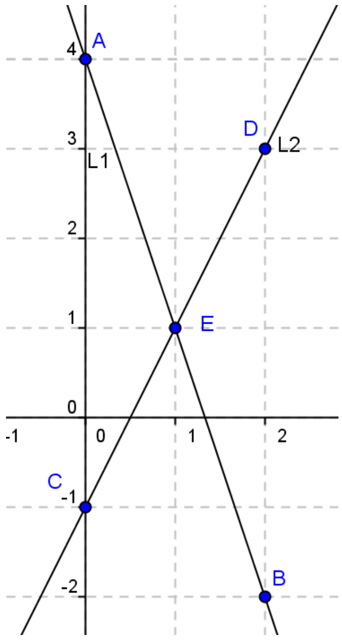
Para trazar las rectas, se asignan dos valores distintos a x, y se calcula el correspondiente valor de y, en cada caso.
Se marcan estos dos puntos en el plano cartesiano. Luego, se traza la recta que pasa por estos dos puntos, y se repite el procedimiento para la otra ecuación.

En este caso, en la primera ecuación, si x = 0, entonces y = 4, esto corresponde al punto A(0, 4).

Por otro lado, si x = 2, entonces y = –2, que corresponde al punto B(2, –2).

De la misma manera, en la segunda ecuación, si x = 0, entonces y = –1; esto corresponde al punto C(0, –1).
si x = 2, entonces y = 3, que corresponde al punto D(2, 3).

Con esto se pueden graficar ambas rectas como lo muestra el siguiente grafico



Las rectas se intersecan en el punto E(1, 1). Entonces, x = 1, y = 1 es solución
del sistema.

2) Resolución por igualación
Tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 22 \\ 2x + 5y = 18 \end{cases}$$

esto significa, encontrar el punto de intersección entre las rectas dadas, de las cuales se conoce su ecuación.
Despejamos una de las dos variables en las dos ecuaciones, con lo cual tenemos un sistema equivalente (en este caso elegimos y):

$$\begin{cases} y = \dfrac{22 - 4x}{3} \\ y = \dfrac{18 - 2x}{5} \end{cases}$$

Recordamos que al tener dos ecuaciones, si los primeros miembros son iguales los segundos también lo son, por lo tanto:

$$\frac{22-4x}{3}=\frac{18-2x}{5}$$

Luego:

$$\begin{aligned} 5(22-4x) &= 3(18-2x) \\ 110-20x &= 54-6x \\ -20x+6x &= 54-110 \\ -14x &= -56 \\ x &= \frac{-56}{-14} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Reemplazamos el valor de x obtenido en alguna de las ecuaciones (elegimos la segunda):

$$y=\frac{18-2(4)}{5}$$

Operamos para hallar el valor de y:

$$y=\frac{18-8}{5}$$

$$y=\frac{10}{5}$$

$$\boldsymbol{y=2}$$

Verificamos, en ambas ecuaciones, para saber si realmente (x ; y) = (4;2):

$$\begin{aligned} 4(4)+3(2)[=]22 \quad & 2(4)+5(2)[=]18 \\ 16+16[=]22 \quad & 8+10[=]18 \\ 22=22 \quad & 18=18 \end{aligned}$$

Ahora sí, podemos asegurar que ***x= 4 e y = 2***

Realice este mismo ejemplo despejando x al comienzo y reemplazando en las dos ecuaciones.

3) Resolución por sustitución.
Tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{cases} 4x+3y=22 \\ 2x+5y=18 \end{cases}$$

Despejamos una de las variables en una de las ecuaciones (en este caso elegimos y en la primera ecuación):

$$y=\frac{22-4x}{3}$$

Y la reemplazamos en la otra ecuación:

$$2x+5\left(\frac{22-4x}{3}\right)=18$$

Operamos para despejar la única variable existente ahora:

$$\begin{aligned} 2x+\frac{110-20x}{3} &= 18 \\ 2x+\frac{110}{3}-\frac{20x}{3} &= 18 \\ 2x-\frac{20x}{3} &= 18-\frac{110}{3} \\ -\frac{14x}{3} &= -\frac{46}{3} \\ 14x &= 56 \\ x &= \frac{56}{14} \\ \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{4} \end{aligned}$$

Reemplazamos el valor de x obtenido en alguna de las ecuaciones (elegimos arbitrariamente la primera):

$$\begin{aligned} 4(4)+3y &= 22 \\ 16+3y &= 22 \\ 3y &= 22-16 \\ 3y &= 6 \\ y &= \frac{6}{3} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{2} \end{aligned}$$

Hallamos la respuesta x=4, y = 2, obviamente igual que en el caso anterior. No verificaremos, dado que ya sabemos que esta respuesta es correcta.

Realice este mismo ejemplo despejando x al comienzo.

4) Resolución por reducción

Tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{cases} 4x+3y=22 \\ 2x+5y=18 \end{cases}$$

El objetivo es eliminar una de las incógnitas, dejándolas inversas aditivas, sabiendo que una igualdad no cambia si se la multiplica por un número.

También sabemos que una igualdad no se cambia si se le suma otra igualdad.

Si se quiere eliminar la x, ¿por qué número debo multiplicar a la segunda ecuación, para que al sumarla a la primera se obtenga cero?

La respuesta es -2. Veamos:

$$\begin{array}{rrcl} & 4x+3y & = & 22 \\ (-2)\rightarrow & 2x+5y & = & 18 \end{array}$$

Con lo que obtenemos:

$$\begin{array}{rcr} 4x+3y & = & 22 \\ -4x-10y & = & -36 \end{array}$$

Y la sumamos la primera obteniéndose:

$$-7y = -14$$

$$\mathbf{y = 2}$$

Reemplazar el valor obtenido de y en la primera ecuación:

$$\begin{array}{rcl} 4x+3(2) & = & 22 \\ 4x+6 & = & 22 \end{array}$$

Y finalmente hallar el valor de x:

$$\begin{array}{rcr} 4x & = & 22-6 \\ 4x & = & 16 \\ x & = & \frac{16}{4} \\ x & = & 4 \end{array}$$

Ejercicio: Resuelve por este método:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y = 4 \\ 4x + 8y = 40 \end{cases}$$

5) Resolución por determinante

Sabemos que un determinante se representa como:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Este se calcula de la siguiente manera: $\Delta = a \cdot d - b \cdot c$

Sea el sistema:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

El valor de x e y está dado por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad e \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Resolvamos el sistema::

$$\begin{cases} 4x+3y=22 \\ 2x+5y=18 \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 22 & 3 \\ 18 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{110-54}{20-6}=\frac{56}{14}=4 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 22 \\ 2 & 18 \end{vmatrix}}{14}=\frac{72-44}{14}=\frac{28}{14}=2$$

El punto de intersección de las rectas dadas es {(4, 2)}

Resuelve, por determinantes: $\begin{cases} x + y = 8 \\ 4x - 3y = -10 \end{cases}$

Ejercicios:

1. Resuelve por el método de reducción los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 6x-5y=-9 \\ 4x+3y=13 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 7x-15y=1 \\ -x-6y=8 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 3x-4y=41 \\ 11x+6y=4 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} 9x+11y=-1 \\ 6x-5y=-3 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} 10x-3y=3 \\ 2x+5y=-4 \end{cases}$

2. Resuelve por el método de sustitución los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x+3y=6 \\ 5x-2y=13 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 5x+7y=-1 \\ -3x+4y=-2 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 4y+3x=8 \\ 8x-9y=-77 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x-5y=8 \\ -7x+8y=25 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} 15x+11y=32 \\ 7y-9x=8 \end{cases}$

3. Resuelve por el método de igualación los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x+6y=27 \\ 7x-3y=9 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3x-2y=-2 \\ 5x+2y=-60 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x+6y=27 \\ 7x-3y=9 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} 7x-4y=5 \\ 9x+8y=13 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} 9x+16y=7 \\ 4y-3x=0 \end{cases}$

4. Resuelve por el método gráfico los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=7 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x-2y=10 \\ 2x+3y=-8 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 5x-3y=0 \\ 7x-y=-16 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} 3x=-4y \\ 5x-6y=38 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} 3x+4y=15 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

5. Resuelve por el método que sea más conveniente los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{matrix} 8x+3y=30 \\ 5x-3y=9 \end{matrix}$ *b)* $\begin{matrix} 9x+5y=83 \\ 4x+5y=48 \end{matrix}$ *c)* $\begin{matrix} 13x-9y=5 \\ 10x+9y=2 \end{matrix}$ *d)* $\begin{matrix} 3x+5y=28 \\ 4x-3y=18 \end{matrix}$ *e)* $\begin{matrix} 16x-5y=1 \\ 7x-4y=42 \end{matrix}$

6. Resolver los siguientes problemas: planteando las ecuaciones y luego usando el método deseado

a) *Encuentra dos números cuya suma sea igual a 30, y el doble del primero, más el segundo sea igual al doble de este último.*

b) *La edad de Carla es el doble que la edad de Macarena. Hace diez años la suma de las edades era igual a la edad que tiene hoy Carla. ¿Cuál es la edad de cada una en la actualidad?*

c) *Si se divide un ángulo recto en dos ángulos agudos, de modo que uno sea el doble del otro más 3', ¿cuál es la medida de cada uno?*

d) *Un padre reparte $10.000 entre sus dos hijos. Al mayor le da $2.000 más que al menor. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno?*

e) *Encuentra dos números tales que si a cada uno le agregamos siete unidades, los resultados están en la razón 3 : 2, pero si les restamos cinco unidades, la razón es 5 : 2.*

f) *El perímetro de un rectángulo es 30 cm. El doble de la base tiene 6 cm más que la altura. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?*

g) *Dos estantes contienen en total 40 libros. Al traspasar 5 libros de un estante a otro, resulta que uno queda con el triple del otro. ¿Cuántos libros había originalmente en cada estante?*

h) *Para pagar una cuenta de $3.900, un extranjero entrega 9 libras esterlinas y 15 dólares, recibiendo $75 de vuelto. Otro extranjero paga su cuenta de $4.330, con 15 libras esterlinas y 9 dólares, recibiendo $25 de vuelto. ¿A qué cambio, en pesos, se han cotizado las libras esterlinas y los dólares?*

i) *Encuentra las edades de dos hermanos sabiendo que al mayor le faltan dos años para tener cinco veces la edad actual del menor y que si el mayor tuviera seis años menos tendrían la misma edad.*

j) *La suma de dos números es 45. Si al primero se le suma 5 y al segundo se le resta 5, se obtienen dos números tales que el primero es el doble que el segundo. ¿Cuáles son los números?*

k) *El valor de una fracción es 1. Si se disminuye el numerador en 3 unidades y se aumenta el denominador en 5 unidades, el nuevo valor es igual a 3. ¿Cuál es la fracción?*

l) *Encuentra dos números tales que su suma sea 42 y su diferencia 6.*

m) *Una persona tiene $8.000 en 200 monedas de $10 y de $50. ¿Cuántas monedas de $10 y de $50 tiene?*

n) *Divide el número 19 en dos partes tales que 2/3 de la menor sea igual a 3/5 de la mayor.*

o) *Encuentra una fracción que si se disminuye su numerador en 4 unidades y se aumenta su denominador en 5, es equivalente a 1. Pero si se disminuye sólo el denominador en 7, será equivalente*

p) *La suma de dos números es 13, si el mayor se divide por el menor se obtiene por cuociente 2 y por resto 1. Encuentra ambos números.*

q) *La edad de un hijo es 1/4 de la edad de su padre. En 7 años más la edad del hijo será 4/9 la del padre. Encuentra las edades actuales de ambos.*

r) *Un niño tiene 2 años menos que el cuádruplo de la edad de su perro. Si la diferencia entre sus edades es 4 años. Encuentra la edad de ambos.*

s) *Si el numerador de una fracción se aumenta en 3 y su denominador se disminuye en 1, se obtiene 5/2, pero si solamente se aumenta su numerador en 2, ésta equivale a 4/3. Determina la fracción.*

t) *Encuentra dos números enteros consecutivos, sabiendo que la cuarta parte y la quinta parte del primero y la suma de la tercera parte y la séptima parte del segundo son también números consecutivos*