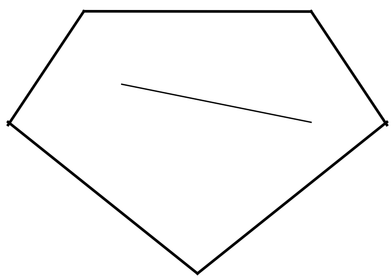
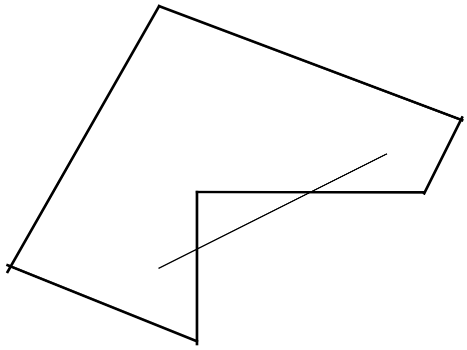
POLÍGONOS Y TRIÁNGULOS

POLÍGONOS.

POLÍGONO es una figura limitada por segmentos de rectas.
Los polígonos pueden ser cóncavos o convexos.



POLÍGONO CONVEXO



POLÍGONO CÓNCAVO.

Se clasifican de acuerdo al número de lados:

3 lados es un ___________________
4 lados es _____________________.
5 lados es un _______________________
6 lados es un _________________________
10 lados es un _______________________
20 lados es un ____________________

ANGULOS INTERIORES DE UN POLÍGONO

La suma de los ángulos interiores se obtiene multiplicando 180º por el número de lados del polígono menos dos.

$$S = 180^{\circ}(n - 2)$$

DIAGONALES

Número de diagonales que parten de un sólo vértice.

*El número de diagonales que se pueden trazar en un polígono de **n** lados, desde un mismo vértice se obtiene restando tres al número de lados.*

$$\mathbf{d = n - 3}$$

NÚMERO TOTAL DE DIAGONALES.

*El número total de diagonales que se pueden trazar en un polígono de **n** lados se obtiene según la siguiente fórmula:*

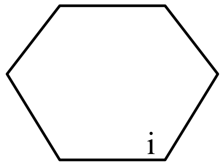
$$\mathbf{D = \frac{n}{2}(n - 3)}$$

POLIGONO REGULAR.

Es el polígono que tiene todos sus lados iguales y sus ángulos congruentes. Además se puede inscribir en una circunferencia.

a) **Angulo Interno**: como tiene todo sus ángulos congruentes, se divide la suma total por el número de ángulos.

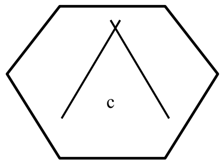
$$\boxed{\angle_i = \frac{180^\circ(n-2)}{n}}$$



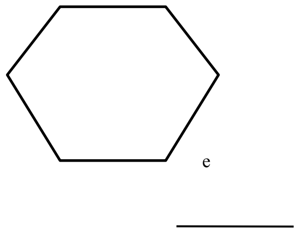
b) **Angulo del centro**: se divide 360° por el número de lados del polígono

.

$$\boxed{\angle_c = \frac{360^\circ}{n}}$$



c) **Angulo exterior**: también se obtiene dividiendo 360° por el número de lados.



$$\boxed{\angle_e = \frac{360^\circ}{n}}$$

EJERCICIOS.

21.- ¿Cuánto mide el ángulo interior de un decágono regular?

22.- ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un polígono de 8 lados?

23.- ¿Cuántas diagonales se pueden trazar en total en un polígono de 9 lados?

24.- ¿Cuál es el polígono regular cuyo ángulo interior mide 150º ?

25.- ¿En qué polígono se pueden trazar 9 diagonales en total ?

26.- En un polígono regular de 12 lados:

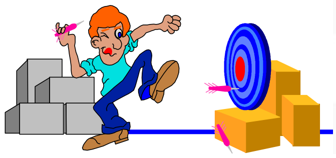
a) ¿cuánto mide cada ángulo interior?

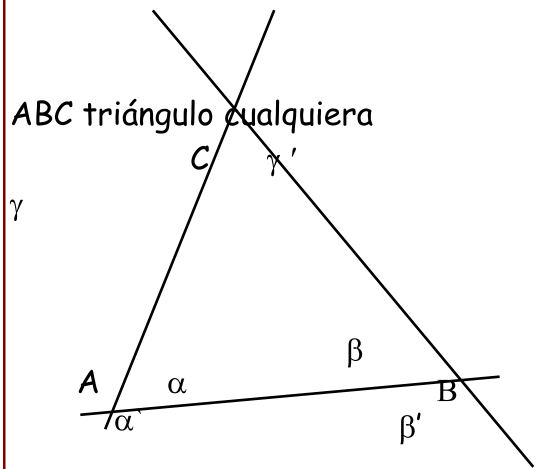
b) ¿cuánto mide cada ángulo exterior?

c) ¿cuánto mide cada ángulo central?

<u>TRIÁNGULOS.</u>

Identificar los triángulos.





AB , BC y AC lados del triángulo

α, β, γ $\angle$ interiores

α', β', γ' $\angle$ exteriores

A, B y C vértices del triángulo

CLASIFICACION DE TRIÁNGULOS.

<u>SEGÚN SUS LADOS.</u>

1. **EQUILÁTERO** **AB ≅ BC ≅ AC** $\Rightarrow$ $\angle\alpha \cong \angle\beta \cong \angle\gamma$
2. **ISÓSCELES** **AC ≅ BC** $\Rightarrow$ $\angle\alpha \cong \angle\beta$
3. **ESCALENO** **AB ≠ BC ≠ AC**

<u>SEGÚN SUS ÁNGULOS :</u>

4. **ACUTÁNGULO** Todos sus ángulos interiores son agudos.
5. **RECTÁNGULO** 1 ángulo recto y dos agudos suplementarios
6. **OBTUSÁNGULO** 1 ángulo obtuso y dos agudos.

<u>PROPIEDADES DE TODO TRIÁNGULO :</u>

I. LOS TRES ÁNGULOS INTERIORES SUMAN EN CONJUNTO 180º.

$$\boxed{\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma \;=\; 180°}$$

II. LOS TRES ANGULOS EXTERIORES EN CONJUNTO, SUMAN 360º.

$$\angle\alpha' + \angle\beta' + \angle\gamma' = 180^\circ$$

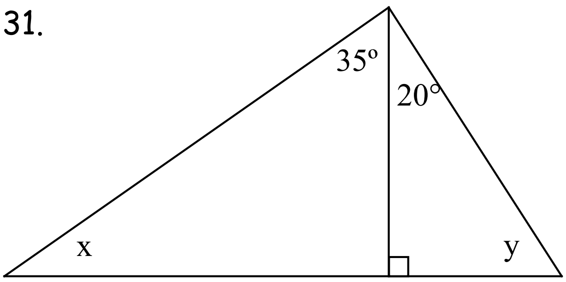
III. CADA ANGULO EXTERIOR ES EQUIVALENTE A LA SUMA DE LOS DOS ÁNGULOS INTERIORES NO ADYACENTES.

$$\angle\alpha' = \angle\beta + \angle\gamma$$
$$\angle\beta' = \angle\alpha + \angle\gamma$$
$$\angle\gamma' = \angle\alpha + \angle\beta$$

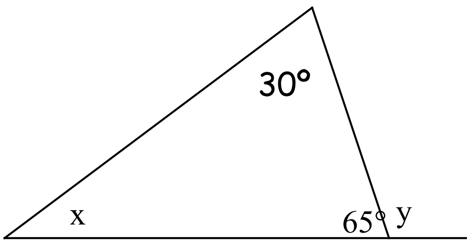
EJERCICIOS :

27) De los tres ángulos de un triángulo el mayor mide 32° más que el segundo y éste 25° más que el tercero. ¿ Cuánto mide cada ángulo ?	28) El ángulo basal de un triángulo isósceles mide 57° más que el ángulo del vértice. ¿ Cuánto mide cada ángulo ?
29) Los ángulos interiores de un triángulo están en la razón de 3 : 5 : 7. ¿ Cuál es la medida del ángulo del medio ?	30) El perímetro de un triángulo equilátero es 24. ¿ Cuál es la magnitud de su lado ?

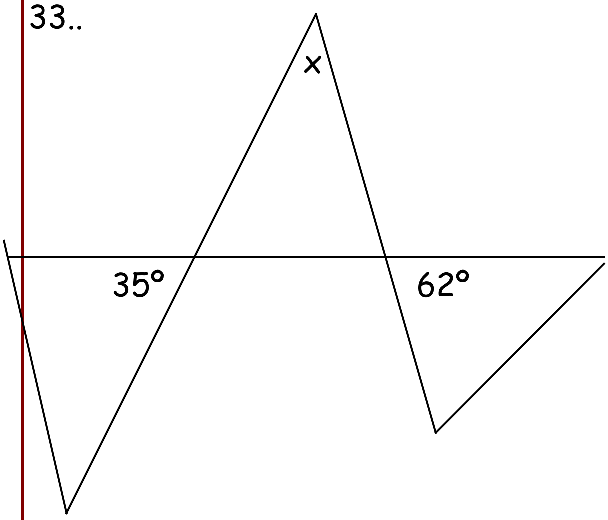
31.



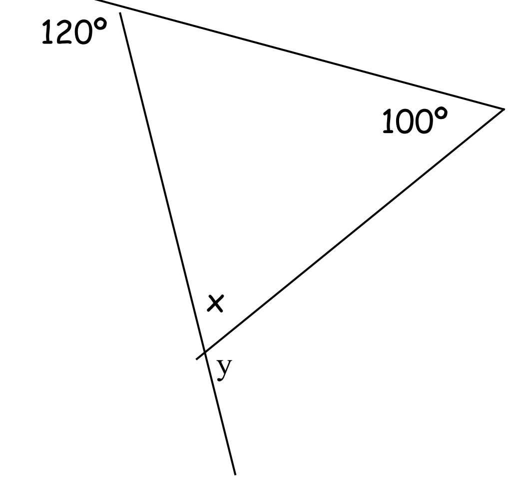
32.



33..

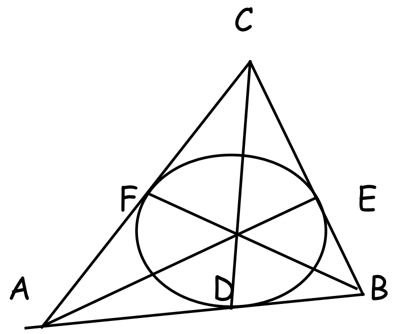


34.



SEGMENTOS SECUNDARIOS EN UN TRIÁNGULO.

I.BISECTRICES.

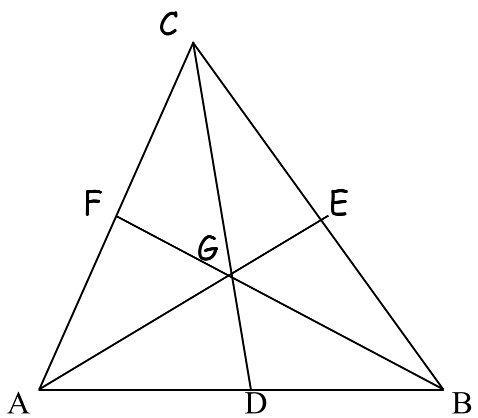


AE = b_α
BF = b_β
CD = b_γ

Las tres bisectrices se cortan en un mismo punto que sirve de centro a la circunferencia INSCRITA.

DICHO PUNTO SE LLAMA INCENTRO.

II. TRANSVERSALES DE GRAVEDAD.



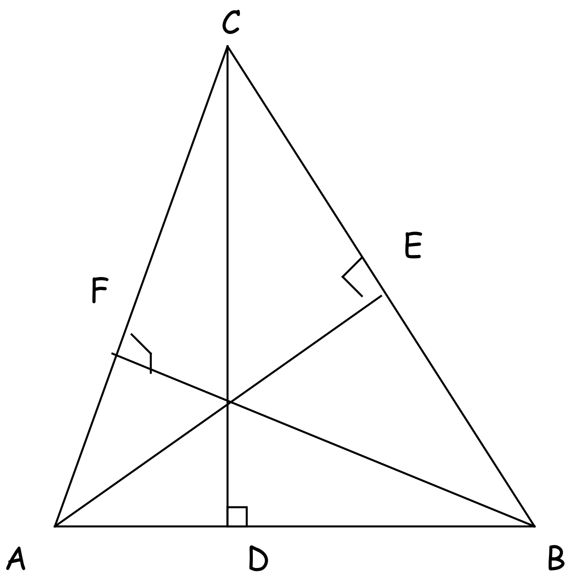
E punto medio de BC
D punto medio de AB
F punto medio de AC.

$\overline{AE} = t_a$; $\overline{BF} = t_b$; $\overline{CD} = t_c$

Las tres tranversales se cortan en un sólo punto llamado CENTRO DE GRAVEDAD.

Una característica especial de las transversales es que el segmento adyacente al vértice es el doble del segmento adyacente al lado. es decir, $AG = 2 \cdot GE$.

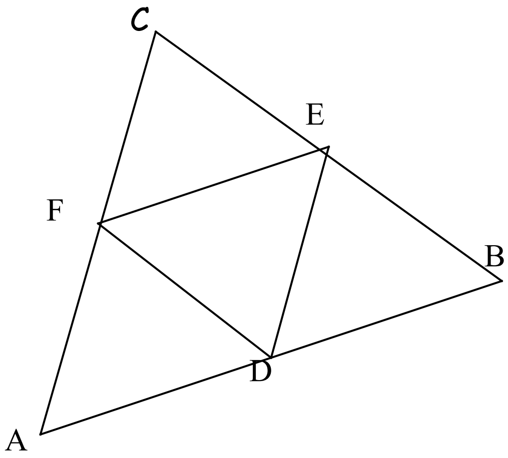
III. ALTURAS DEL TRIÁNGULO.



La altura es un segmento perpendicular al lado bajada desde el vértice opuesto.
$CD \perp AB$; $AE \perp BC$; $BF \perp AC$

Las tres alturas se cortan en un mismo punto llamado ORTOCENTRO.

IV. MEDIANAS.

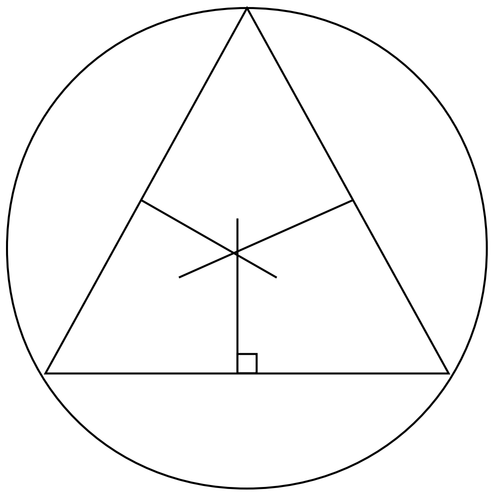


D, E y F son los puntos medios de los lados del triángulo.

DE, EF y FD son las medianas.

Cada mediana que une dos puntos medios es paralela al lado al tercer lado y es la mitad de dicho lado.

V. SIMETRALES

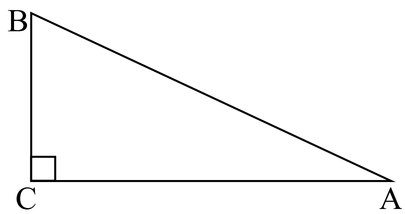


Simetral es la perpendicular levantada en el punto medio de cada lado del triángulo.

Las tres simetrales se cortan en un solo punto que sirve de centro a la circunferencia circunscrita, es decir, pasa por cada vértice del triángulo. Dicho punto se denomina CIRCUNCENTRO.

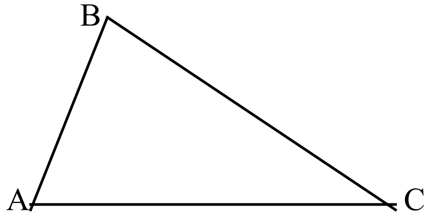
9. ¿Qué puedes decir acerca de **las alturas?. Dibújalas.**

a) en un triángulo rectángulo



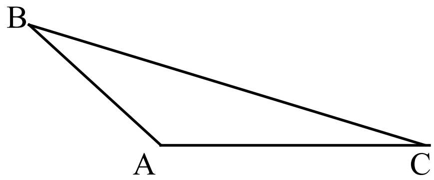
<u>Conclusiones</u>

b) en un triángulo acutángulo

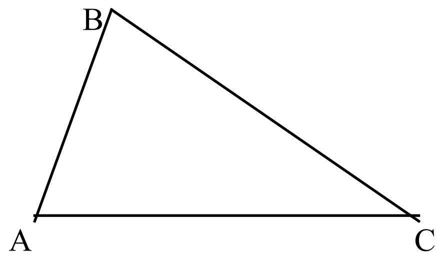


<u>Conclusiones</u>

c) en un triángulo obtusángulo **Conclusiones**

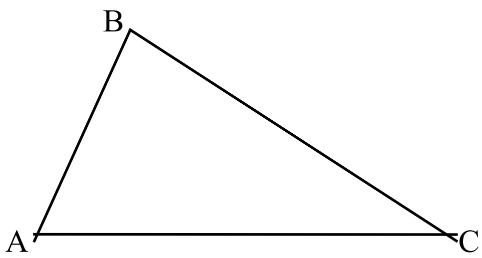


Dibuja **las medianas** : **Conclusiones**



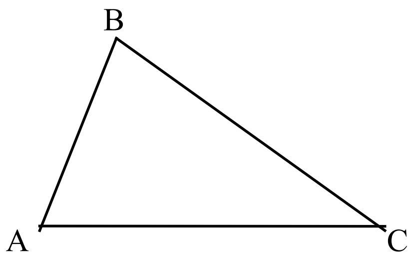
Traza **las simetrales** de los lados del triángulo :

Conclusiones



Traza las transversales de gravedad :

Conclusiones



CONSTRUCCIONES DE TRIÁNGULOS

PRIMER CASO : Se conocen los tres lados.

Construye un triángulo dados : lado a = 4 ; b = 5 cm y c = 6 cm.

Construcción :

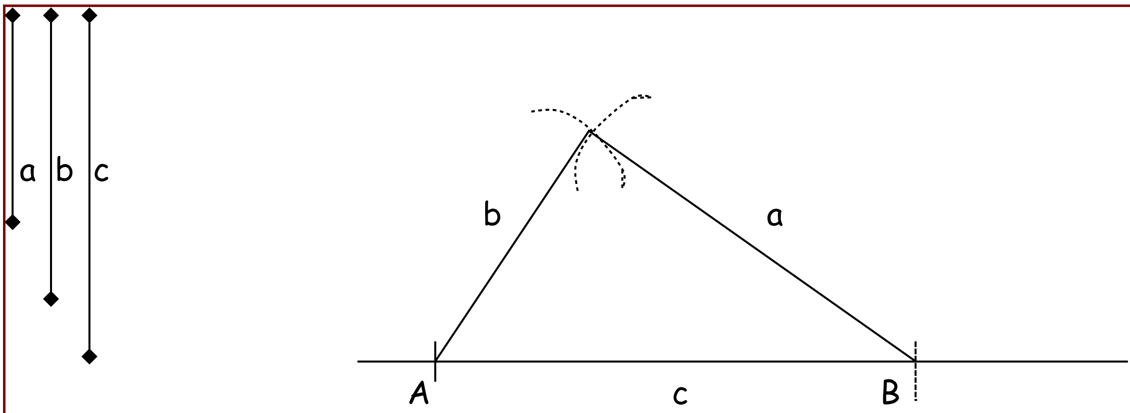
1° Se dibujan los tres trazos dados

2° Se traza una recta. Se determina el vértice A. Se dibuja una arco centro A y con radio c. Se determina el vértice B.

3° Desde A se traza un nuevo arco hacia C con radio b.

4° Desde el vértice B se traza un arco hacia C con radio a.

5° Queda determinado el vértice C. Se une A con C y b con C



EN TU CUADERNO :
35. Dibuja un triángulo dados : a = 12 : b = 7 ; c = 8

36.¿ Crees tú poder construir una triángulo dados a = 4 ; b = 6 ; c = 12 cm. ?

SEGUNDO CASO : Se conocen dos lados y el ángulo formado por ellos..
Construye un triángulo dados : lado b = 4 ; c = 5 cm y α = 60°.
Construcción :
1° Se dibujan los dos trazos dados y el ángulo de 60°

2° Se traza una recta. Se determina el vértice A. Se dibuja una arco centro A y con radio c. Se determina el vértice B.

3° En A se copia el ángulo de 60°. Se obtiene el lado libre del ángulo α.

4° Sobre el lado libre del ángulo se copia el segmento b. Se determina el vértice C.

5° Se une B con C y queda construido el triángulo.

CONSTRUCCIÓN (EN TU CUADERNO)

EN TU CUADERNO :
37. Construye un triángulo dados : b = 4,5 cm ; c = 5,0 cm y α = 50°
38. Construye un triángulo dados : b = 52 mm ; a = 35 mm y γ = 65°

TERCER CASO : Se conocen un lado y los dos ángulos contiguos.
Construye un triángulo dados : lado c = 4,6 cm ; α = 120° y β = 30°.
Construcción :
1° Se dibujan el trazo dado y los dos ángulos dados.

2° Se traza una recta. Se determina el vértice a. Se dibuja una arco centro A y con radio c. Se determina el vértice B.

3° En el vértice A se copia el ángulo α.

4º En el vértice B se copia el ángulo β.

5º Se unen los vértices con los puntos determinados en cada arco. Queda determinado el triángulo ABC.

EN TU CUADERNO :

39. Construye un triángulo dados : $a = 4{,}5$ cm ; $\gamma = 75º$ y $\alpha = 50º$
40. Construye un triángulo dados : $b = 52$ mm ; $\beta = 105º$ y $\gamma = 35º$

CUARTO CASO : Se conocen dos lados y un ángulo.

Construye un triángulo dados : lado $c = 4{,}6$ cm ; $b = 5{,}4$ cm y $\beta = 85º$.

Construcción :

1º Se dibujan los tres datos
2º Se traza una
3º
4º
5º

EN TU CUADERNO :

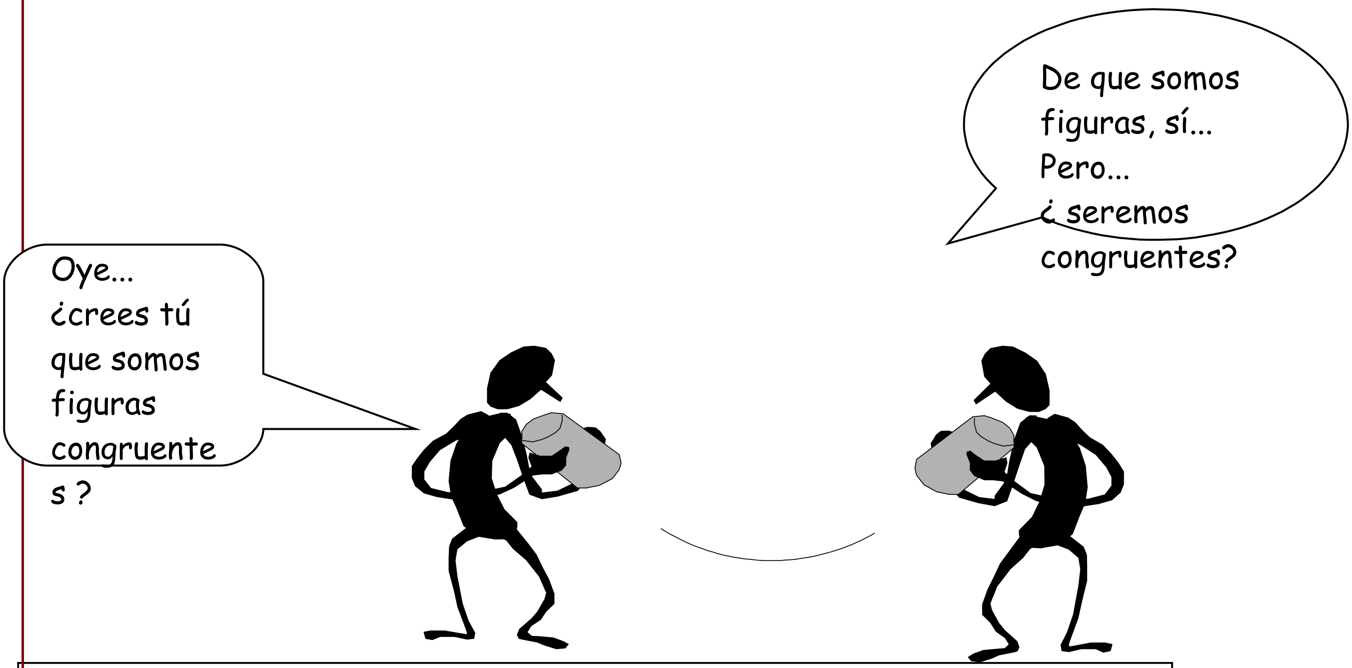
41. Construye un triángulo dados : $b = 4{,}5$ cm ; $c = 5{,}0$ cm y $\beta = 50º$

42. Construye un triángulo dados : $b = 52$ mm ; $a = 35$ mm y $\beta = 65º$

43. El pueblo A está situado a 23 km al sur del pueblo B. El pueblo C está 35 km al suroeste de B. ¿ Cuál es la distancia entre A y C?

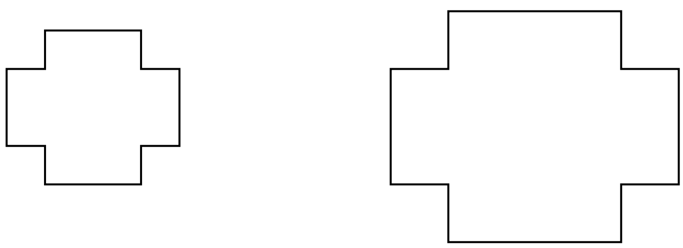
44. Desde un acantilado, Luis observa un barco bajo un ángulo de 20º. Luis se encuentra a 15 metros sobre el nivel del mar. ¿ A qué distancia está el barco

CONGRUENCIA.



ESTAS SÍ SON FIGURAS CONGRUENTES

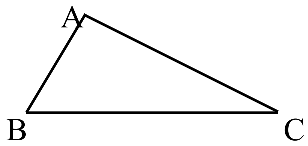
ESTAS SÍ SON FIGURAS CONGRUENTES

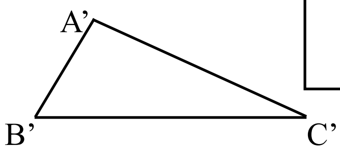


ESTAS **NO** SON FIGURAS CONGRUENTES

Dos figuras son congruentes cuando tienen la misma forma y el mismo tamaño, es decir, si al colocarlas una sobre la otra son coincidentes en toda su extensión.

Esto significa que deben tener lados y ángulos iguales :





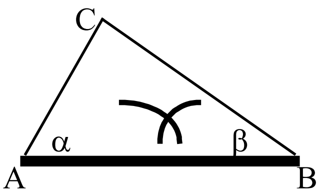
AB = A’B’ , ∠ A = ∠ A’
AC = A’C’ , ∠ B = ∠ B’
BC = B’C’ , ∠ C = ∠ C’

La notación de que un triangulo es congruente con otro lo anotamos $\Delta\, ABC \cong \Delta\, A'B'C'$

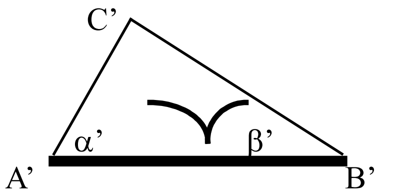
Existen criterios que permiten afirmar que dos triángulos son congruentes :

CRITERIO ANGULO - LADO - ANGULO (A . L ..A)

Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales un lado y los ángulos adyacentes a él :

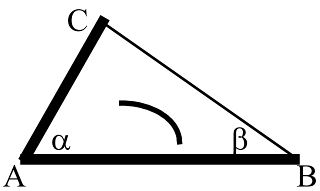


A : ∠ A = ∠ A’
L : AB = A’B’
A : ∠ B = ∠ B’

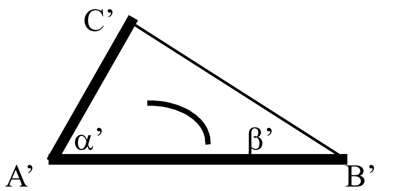


2. CRITERIO LADO - ANGULO - LADO (L . A .L)

Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos :

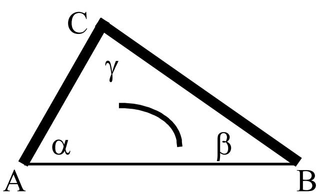


L : AC = A’C’
A : ∠ α = ∠ α’
L : AB = A’B’

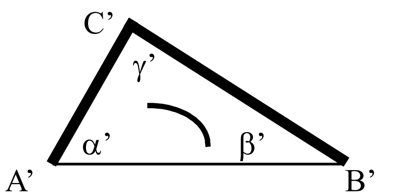


3. CRITERIO LADO - LADO - ANGULO (L . L. A .)

Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales 2 lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos :

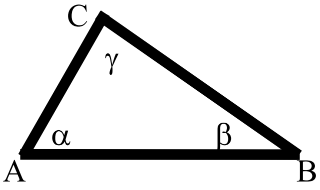


L : AC = A’C’
L : BC = B’C’
A : ∠ α = ∠ α’

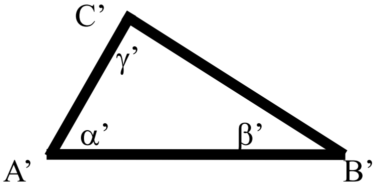


4. CRITERIO LADO - LADO - LADO (L . L. L .)

Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente iguales :

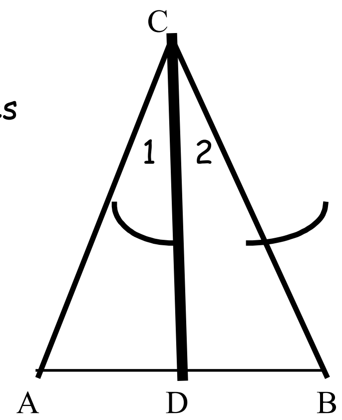


L: AC = A'C'
L: BC = B'C'
L: AB = A'B'



DOS EJEMPLOS DE APLICACIÓN:

1) **TEOREMA**: La bisectriz correspondiente al ángulo basal de un triángulo isósceles es perpendicular a la base y la biseca.



Hipótesis: Δ ABC es isósceles
CD es bisectríz

Tesis: $\angle ADC = \angle CDB = 90º$
y $AD = DB$

Demostración: En primer lugar se deben ubicar los datos de la hipótesis en la figura para luego darse cuenta cuál es el criterio a utilizar, así:

L : AC = BC (lados iguales de un triángulo isósceles)
A : $\angle 1 = \angle 2$ (por ser CD bisectríz)
L : CD = CD (lado común a los dos triángulos)

Por tanto: $\Delta ADC \cong \Delta DBC$ (por criterio L.A.L.)

Ahora, si dos triángulos son congruentes, entonces todos sus elementos respectivos son iguales (se dice que los elementos homólogos son iguales) , así:

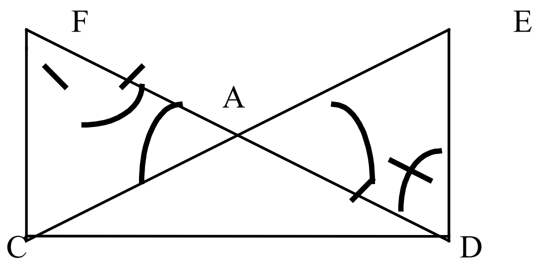
$\angle ADC + \angle CDB = 180°$ (son ángulos adyacentes)

y como éstos son iguales, cada uno mide 90° (los ángulos homólogos son los opuestos a lados iguales).

Además: AD = DB (por ser elementos homólogos)

Q. E. D. (Queda Esto Demostrado)

2) En la figura :



Hipótesis : FA = DA y $\angle$ CFA = $\angle$ EDA

Tesis : i) Δ ACF $\cong$ Δ ADE
ii) A es el punto medio de CE

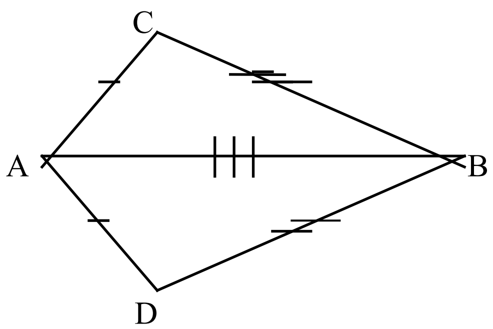
Demostración :

I : $\angle$ CFA = $\angle$ EDA (por hipótesis)
II : FA = DA (por hipótesis)
III: $\angle$ CAF = $\angle$ EAD (ángulos opuestos por el vértice)

por tanto : i) Δ ACF $\cong$ Δ ADE (por criterio L.A.L.)
ii) CA = EA (lados homólogos)

---

3) En la figura :



Hipótesis : AC = AD y BC = BD

Tesis : i) Δ ABC $\cong$ Δ ABD
ii) $\angle$ ACB = $\angle$ ADB

Demostración :

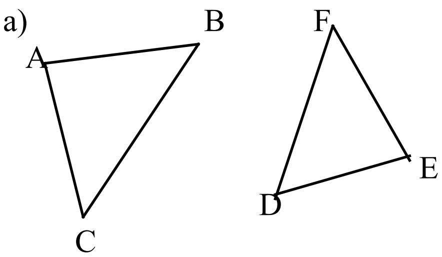
I: AC = AD (por hipótesis)
II : BC = BD (por hipótesis)
III : AB = AB (por hipótesis)

Así : i) Δ ABC $\cong$ Δ ABD (por criterio L.L.L.)
ii) $\angle$ ACB = $\angle$ ADB (ángulos homólogos)

E J E R C I C I O S.

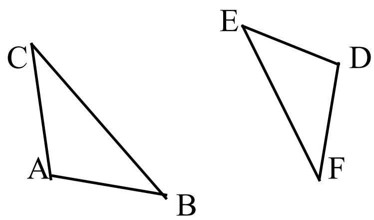
45. Considera los siguientes pares de triángulos, en los que se indica los lados o ángulos respectivamente congruentes. ¿ En qué casos se puede asegurar la congruencia del par de triángulos ? Indica el criterio utilizado en cada caso:

a)



AB = DE ,

b)

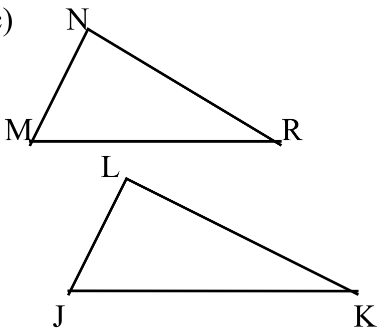


AC = DF

AC = FE , AB = ED

BC = DF ∠ CAB = ∠ EDF

c)

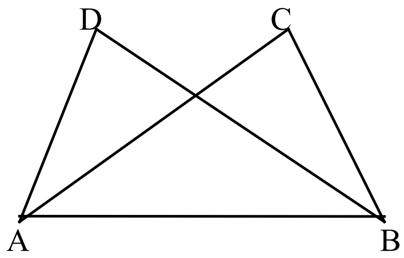


MN = LJ

MR = JK

∠ NRM = ∠ LKJ

d)

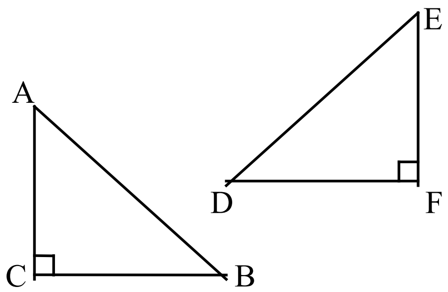


∠ DAB = ∠ CBA

∠ DBA = ∠ CAB

AB = AB

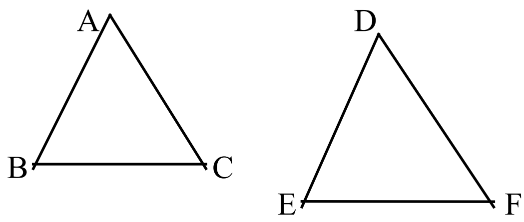
e)



BC = EF

AB = DE

f)



AB = BC = AC

DE = DF = FE

46. Señala en qué condiciones serían congruentes (Realiza un dibujo)

a) Dos trazos o segmentos	b) Dos rectángulos
c) Dos cuadrados	d) Dos circunferencias

47. Responde , EN EL CUADERNO ,las siguientes preguntas (Justifica tus respuestas)

a) ¿ Pueden dos triángulos ser congruentes sin ser coplanares?

b) ¿ Pueden dos artículos manufacturados en serie llamarse congruentes en el más estricto sentido matemático?

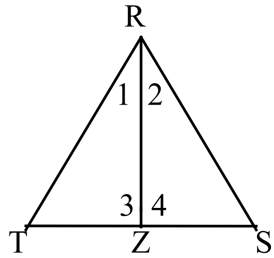
c) Un cuadrado tiene un lado igual a uno de los lados de otro cuadrado. ¿ Son los cuadrados necesariamente congruentes?

d) Un cubo tiene igual arista a una arista de otro cubo. ¿ Son los cubos congruentes?

En los casos siguientes demuestra lo que se indique:

48. Hipótesis: $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$

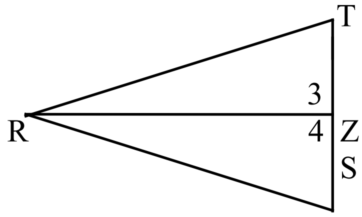
Tesis : $\Delta\, RZS \cong \Delta\, RZT$



---

49. **Hipótesis**: $\angle 3 = \angle 4 = 90º$; $RS = RT$

Tesis : $\Delta\, RZS \cong \Delta\, RZT$

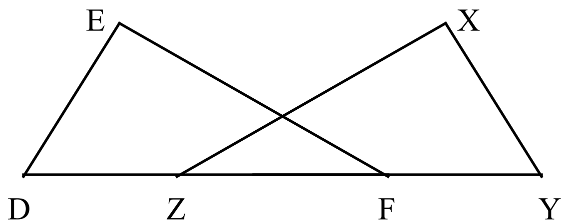


---

50. Hipótesis: $DE \perp EF$; $XY \perp XZ$

$\angle D = \angle Y$; $DZ = FY$

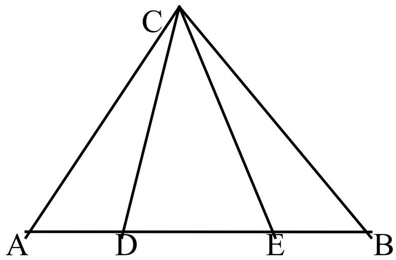
Tesis **:** $\Delta\, DEF \cong \Delta\, XYZ$



---

51. **Hipótesis**: $AC = BC$ y $CD = CE$

Tesis : $\Delta\, ADC \cong \Delta\, BEC$



CUADRILÁTEROS.

PARALELOGRAMO
(dos pares de lados paralelos)

CUADRADO	lados iguales	ángulos rectos	diagonales se bisecan y son perpendiculares entre sí.
RECTANGULO	lados paralelos iguales	ángulos rectos	sus diagonales se bisecan.
ROMBO	lados iguales	ángulos oblicuos	sus diagonales se bisecan y son perpendiculares entre sí.
ROMBOIDE	lados paralelos iguales	ángulos oblicuos	sus diagonales se bisecan

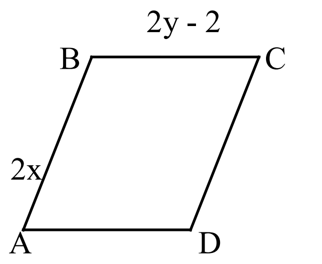
Los ángulos internos y opuestos son congruentes.
Los ángulos internos no opuestos son suplementarios.

TRAPECIOS

ESCALENO	(Sus lados no paralelos desiguales)
ISOSCELES	(Sus lados no paralelos iguales)
RECTANGULO	(Tiene dos ángulo rectos

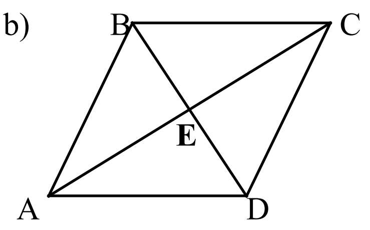
55.- En los casos siguientes , si ABCD es paralelogramo , hallar el valor de las variables:

a)



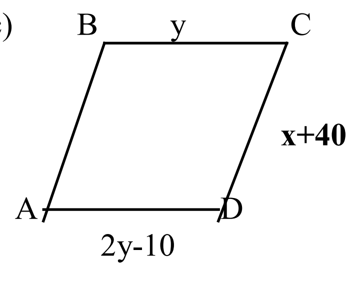
Perímetro ROMBO = 40

b)



DE = 3 y , BE = x
AC = 30 , EC = z

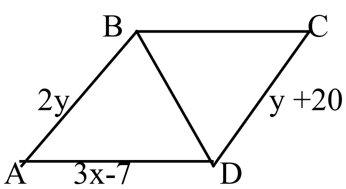
c)



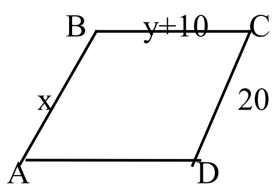
ABCD es rombo

56.- En los siguientes casos , si **ABCD** es un rombo , hallar x e y .

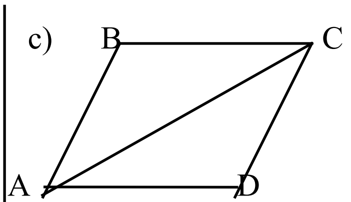
a)



b)

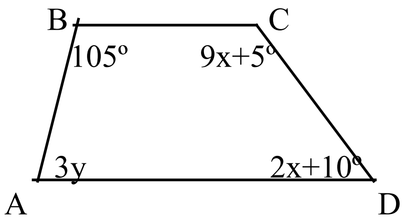


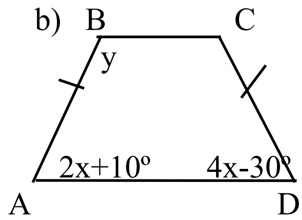
c)

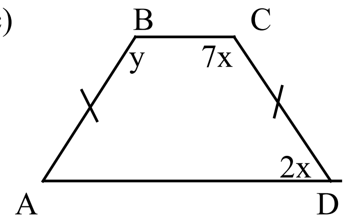


$\angle$ BAC = 4x - 5
$\angle$ CAD = 2x + 15

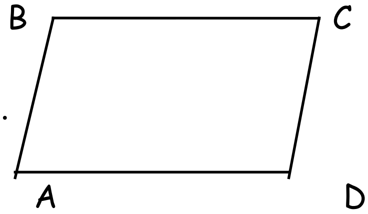
57.- Sean ABCD trapecio, hallar x e y en los casos siguientes :

a)


b)


c)


58.- Si ABCD es un paralelogramo , hallar x e y en los casos siguientes :



(a) $AD = 5x$, $AB = 2x$, $CD = y$, Perímetro = 84 .

(b) $AB = 2x$, $BC = 3y+8$, $CD = 7x-25$, $AD = 5y-10$.

(c) $\angle A = 4y-60$, $\angle C = 2y$, $\angle D = x$.

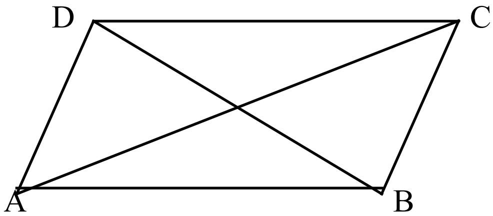
(d) $\angle A = 3x$, $\angle B = 10x-15$, $\angle C = y$.

E J E R C I C I O S.

Usando congruencia de triángulo demuestra las siguientes propiedades de los paralelógramos:

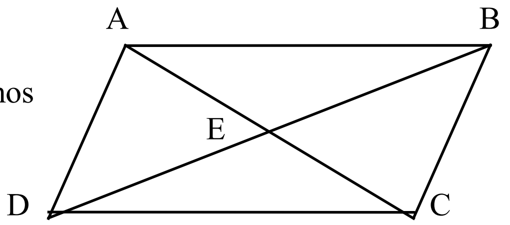
59. Los lados opuestos de los paralelógramos son iguales.

$AB = CD$ y $AD = BC$



60. Los ángulos opuestos de los paralelógramos son iguales :

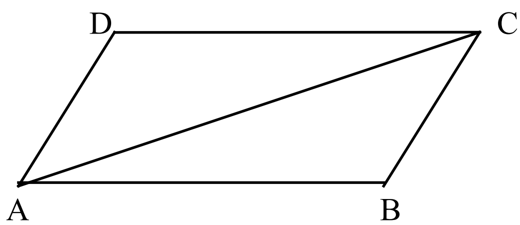
$\angle ABC = \angle ADC$ y $\angle DAC = \angle BCD$



61. Las diagonales de un paralelógramo se dimidian : $AE = EC$ y $BE = DE$

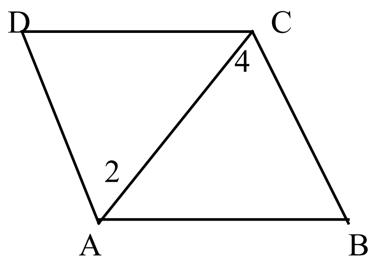
62. **Hipótesis**: $AD \parallel BC$ y $AB \parallel DC$

Tesis : $\Delta ACD \cong \Delta ACB$

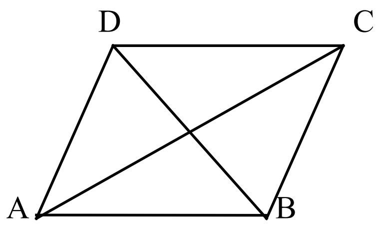


63.. **Hipótesis**: $CD = AB$ y $\angle 2 = \angle 4$

Tesis : $\Delta ACD \cong \Delta ACB$ y $BC = AD$

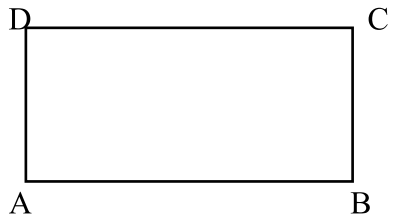


64.Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.



Hipótesis: ABCD es rombo
Tesis : AC $\perp$ DB

65.Las diagonales de un rectángulo son iguales.



Hipótesis : ABCD es rectángulo
Tesis : AC = BD